

。第 1 章。

数学の始まるところ

● どうして $1+1$ が 2 になるのか？

そう聞いて返ってくる答えは「そういうものだからです！」だろう。昔から、子どもはいらいらすると「そうだとしたらそうなの！」と言うものだけど、「そういうものだからです！」というのはその別バージョンみたいなものだ。こういう言葉の裏には、ルールを作る権力を持つ人がいる。そういう権力者は理由の説明もなしに好き勝手にルールを作れて、他の人たちはその人の子分みたいに、彼らの作ったルールに問答無用で従わなければならない。

そういう考え方に不安を感じるのはふつうの感覚だ。実を言えば数学者が衝動的にやりたいと思うのは、そんなルールを全部ぐさま破ること、またはそういうルールが通じない抜け道を見つけることだ。そして、権力者と言われている人たちには彼ら自身が思っているような権威なんてないことを証明したいのだ。

数学は、とにかく守らなければいけないルールでできた世界だという印象が強い。融通がきかなくてつまらないと思われるのはそのせいだ。でも私の数学愛の土台のどこかには、ルールを破る、あるいは破らないまでも楯突くのが好き、という気持ちがある。そう言うとなんだか青くさい若者みたいで気恥ずかしいけれ

ど。そしてもう1つ、私の数学愛を支えているのが、たえず「なぜ？」と問いかけたいという思いだ（こう言うと、子どものままで全然成長していない気もするけれど）。でもルールを破りたい気持ちも、なぜと問いかけたい気持ちも、人類の知識を前進させるには大切なもので、特に数学の理解を深めるためには欠かせない。この章のテーマである「数学の起源」は、こういう感情を抜きにして語ることはできない。

ただ、言っておきたいのだけれど、私は日常生活では法律をきちんと守るタイプだ。それは地域社会を1つにしたり、住民の安全を守ったりするためのルールの意味を理解しているからで、私はそういうルールは必要だと思っている。目的があって作られているルールに従うのは苦ではない。受け入れられないのは、理由がなさそうな、あるいは理由があっても認められないような、独断的なルールだ。たとえば「毎日ベッドメイクをしなければならぬ」（私の性分に合わない）とか、「チョコレート^{たね}を電子レンジで溶かしてはいけない」（確かに味は落ちがちだけど、15秒おきにかき混ぜるのを忘れなければ大丈夫）とか。

そんなわけで、私は数学の見かけ上の「ルール」がどこから来るのか、そして数学のそもそもの始まりはどこにあるのかを考えてみたい。これから説明するのは、最初は小さかった数学の種から芽が出て、すごい背丈の植物に有機的に成長していく流れだ。この種になるのは、「どうして $1+1$ が2になるのですか？」みたいな、だれでも考えるような素朴な疑問であり、幼い子どもが無邪気に聞いてくる質問だ。「それはそういうものだから」と妥協してはダメだ。どんな植物の種でもそうだが、正しい方法で育

てないときちんと成長しない。それには肥えた土と、根を張れる地下空間、そしてたっぷりの栄養が必要だ。残念ながら、私たちの素朴な疑問はそうやってきちんと育てられず、「くだらない」と言われて放置されてしまうことがあまりに多い。でも、こういう素朴な疑問が深遠な数学の疑問と違うのは、どう育てられたか、それだけだ。つまり、違いはないということ。どちらも元は同じ種なのだ。

数学が嫌いになるきっかけとして多いのは、「1たす1はとにかく2なんです」というふうに、説明なしにこれが正解だと断言されることだ。そんな言い方は明らかに横暴だ。ただ、なぜ正解なのかを考えれば、しっかりした数学の基礎を作ることができ、そこから明確で厳密な議論ができるようになる。そんな明確さと厳密さに、安心感と自由を感じる人もいるが、窮屈で押しつけがましいと思う人もいる。いずれにしても、「どうして $1+1$ が2になるのですか？」のような疑問を掘り下げていけば、数学には明確な正解がないばかりか、場合によってはさまざまなものが真実となりうるという考え方を探究できるようになる。本書はこの疑問をスタート地点として、数の成り立ちや、計算という概念が生まれた背景、そしてそうした概念を図形のような別の数学的文脈に応用できるようになるまでを探っていこう。この中で、数学の発展にかかわるたくさんの重要なテーマに触れていく。数学は、ものの関係を考えることに始まって、抽象的な考え方へと進み、やがてそうした思考を押し広げて身の回りの世界をどんどん取り込むという形で、少しずつ発展していく。

そこで、ここからは $1+1$ が2である理由を考える代わりに、先

に少し進んで、 $1+1=2$ がいつでも正解なのかどうかを考えていこう。

● 境界を押し広げる

子どもは反例を求めるものらしい。「反例」とは、何かが真実ではないことを示す例のことだ。何かがつねに真実だと断言するのは、何かの周りに境界線を引くようなものであり、矛盾する例を探すのはそうした境界線を押し広げようとする事だ。それは数学の世界では大切な衝動である。

子どもに $1+1$ の問題を考えさせるには、こんなふうに言えばいい。「あなたにカップケーキを1個と、別のカップケーキを1個をあげたとしたら、あなたのカップケーキは何個になりますか？」ところが子どもははしゃいで「0個だよ！ だって全部食べちゃったから！」とか言うかもしれない。「0個。カップケーキは好きじゃないから」と答える子もいるだろう。私は、数学の問題に子どもがひねくれた回答をしているのをSNSなどで見かけると、いつもうれしくなってしまう。私のお気に入り、ジョーはリンゴを7個持っていて、そのうちの5個を使ってアップルパイを作りました。リンゴは何個残っているでしょう」という問題への答えだ。この問題の回答欄に、私の友人の子どもは「ジョーはもうそのアップルパイを食べた？」と書いた（テストでは絶対に正解にしてもらえないけれど、正解にしてあげたくなくおもしろい回答だと思う）。このことから、数学の重要な一側面が見えてくる。そして子どもの思考プロセスは、重要なのに正當に評価されない

数学的衝動、つまり正当性のない権威に立ち向かいたいという衝動を示している。

子どもが権威をからかおうとするのは、自分を取り巻く状況の限界を探っているのかもしれないし、ほとんど思うようにならない世界の中で、自分というものを確立しようとしているのかもしれない。私は自分が子どもだったとき、いつも大人の言うことを聞かなければいけないことにいらいらしていたのをよく覚えている。だから、大人に大切なことを聞かれているのがわかっていても、「カップケーキは好きじゃない」とか言って話をそらしては喜んでいた。

それはある意味では生意気で厄介な衝動だけれど、私は数学的な衝動とはそういうものだとも思っている。そう、数学は生意気でやんちゃなんだと思う。別の言い方をすれば、数学は子どもみたいに、いつでもものごとの限界を知ろうとしているのだ。私たちは、自分が「安全な」エリアにいると安心できるように、ものごとが正解である範囲をはっきりさせたいと考えるが、同時に大胆な気分になったり、興味を抑えられなくなったりしたときには、その安全なエリアの外側を探索したいとも思う。幼児は、どこまで行ったら大人が追いかけてくるかを確かめたくて、遠くまで走ってみたりするが、それと同じだ。その意味では、 $1+1$ が2ではない状況を考えてみるのは、そういう衝動の一例だと言える。

もし私が「疲れていないわけじゃない」(I'm not not tired) と言ったら、それは疲れているということだ。子どもはおもしろがって、「疲れてなくななくななくななくななくななくななくな

い！」(I'm not not not not not not not not not not tired!) とか言ったかと思うと、自分が「ない」(not) と何回言ったのか、だれも数えられなかったことに気づいて、急に癇癪^{かんしゃく}を起こしたりもする。ここで言いたいのは、1個の「ない」(not) と1個の「ない」(not) をたすと、0個の「ない」(not) になることだ。これを考えると、私が以前採点するはめになった、ちょっとひどい数学問題のことを思い出す。そこに出てくる長くて退屈な計算には、マイナス記号を間違いそうなところがいくつもあった。その問題の採点がとても苦痛だったのは、学生がマイナス記号の間違いを2回、または4回したら、正しい答えになるからだ。でも数学では実際には、計算過程が正しくない限り、その答えは正しいとは見なされない（この点は次の章で取り上げるつもり）ので、たとえ答えが「正しい」場合にも、計算過程が間違っていないかどうか厳しくチェックしなければならなかった。

$1+1$ が0になるケースは他にもあって、それはすべてが最初から0のときだ。たとえば私が小さいときに住んでいたお菓子の世界がそうだ。そのころ、私は人工着色料にアレルギーがあった。そして当時ではどんなお菓子にも人工着色料が入っていたので、それだけたくさんのお菓子があっても、私にとっては実質的には0だった。

丸め誤差のせいで、 $1+1$ が2より大きくなることもある。整数だけを使っている場合には、1.4 を最も近い整数に丸めると1になる。ところが、1.4 が2個あれば2.8になり、それを丸めると3になる。つまり、数を整数に丸めた世界では、 $1+1$ が3になるように見えるだろう。これと関係があるが少しだけ違うのは、あな

たはコーヒーを1杯買える現金を持ち合わせていて、友だちも1杯買える現金があるケースだ。この場合には、あなたと友人の現金を合わせると、コーヒーを3杯買えるかもしれない。というのは、あなたがコーヒー1.5杯分の現金や、1.9杯分の現金を持っていたとしても、あなた1人ではコーヒー1杯しか買えないからだ。

繁殖によって、 $1+1$ が2以上になることもある。たとえば、ウサギ1匹と別のウサギ1匹を一緒にしておくと、最終的にはウサギはたくさんになる可能性がある。一方で、たし合わせの方法が複雑なせいで、2以上になることもある。テニスのダブルス競技の選手を2ペア集めて、午後ずっとテニスをさせておいたら、いろんな組み合わせでプレイできるので、最終的には2組より多くなる。一方のペアの選手をAとB、もう一方のペアの選手をCとDと呼ぶとすれば、全部でAB、AC、AD、BC、BD、CDというペアができる。つまりテニスの1ペアたす1ペアは6ペアになる。

$1+1$ がちょうど1になることもある。1つの砂山の上にもう1つ砂山を重ねても、できる砂山は1つだ。あるいは、これは私の授業に出ていたアート専攻の学生が指摘したことだが、1種類の色を別の1種類の色と混ぜると、1種類の色になる。他には、これは私が見かけた笑えるネットミームだが、1つのラザニアの上に別のラザニアを重ねても、あいかわらずラザニアは1つだ（元のラザニアより厚いけれど）。

$1+1$ が1になるケースでこれとちょっと違うのは、たとえば、コーヒーを買えばドーナッツが1個無料になるクーポンを持っているが、ドーナッツは1人1個と決まっているので、たてまう

1杯コーヒーを買ってもドーナッツは1個しかもらえない場合だ(だれかもう1人いれば別だけど)。あるいは、列車で「ドアを開ける」のボタンを押すときに、何回押しても1回押すのと同じだ。少なくともドアへの効果という意味ではそうだ。ただ、いらだつ気持ちをどれだけ表せるかという点では違いそう。だから、ドアの前に立ってボタンを連打する人があんなにたくさんいるのだと思う。

今、あなたはこう考えているかもしれない。ここまで挙げてきた例は、たし算になっていなかったり、たしているのは数じゃなかったり、考慮されていない他の理由があったりするので、実際には $1+1$ が2にならない例とは言えない、と。そう考えるのはかまわないが、数学ではそんなふうには考えない。

代わりに数学ではこう言う。これはいったいどういう状況で、何を意味するのか検討しよう。その状況ではどんな結果になるか検討し、ものごとが同じように作用する他の状況を探せるかどうか考えてみよう。 $1+1$ が実際に2になる状況や、2にならない状況についてもっときちんと考えよう。そうすれば、世界について前よりも深く理解できるようになるだろう。

これこそ、数学の始まりだ。そして $1+1$ が2になる状況や、2にならない状況を深く探るために、私は、その数式の出どころを深掘りする以上のことをしてみたい。ここで、数学がそもそもどこから来たのかを突っ込んで考えてみよう。